

تمرین

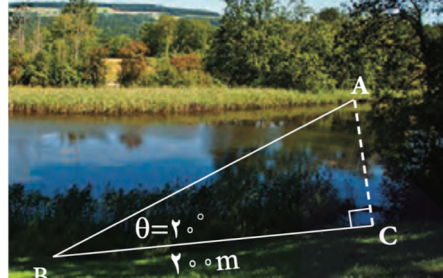
۱ فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی α را به دست آورید.

۲ اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی α را به دست آورید.

۳ اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۴ اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

۵ شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه 200 متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 2° باشد و $\sin 2^\circ \approx 0.034$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ (پاسخ خود را تا دو رقم اعشار برحسب متر بنویسید.)



۶ با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

ب) $\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

الف) $\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

ت) $1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

پ) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha$

ث) $\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

24ghadam.com پاسخ

۱- فرض کنید α زاویه‌ای در ناحیه دوم مثلثاتی باشد و $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. نسبت‌های دیگر مثلثاتی α را به دست آورید.

۱ $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{25}{25} - \frac{9}{25}}$

$\sin \alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = +\frac{4}{5}$

۲

و از آنجا که زاویه α در ربع دوم می‌باشد، علامت تانژانت منفی است $\rightarrow \tan \alpha = -\frac{4}{3}$

$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$

۳

و از آنجا که زاویه α در ربع دوم می‌باشد، علامت کتانژانت منفی است $\rightarrow \cot \alpha = -\frac{3}{4}$

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \frac{3}{4}$

۲- اگر $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ و α زاویه‌ای در ناحیه چهارم مثلثاتی باشد، نسبت‌های دیگر مثلثاتی α را به دست آورید.

۱ رابطه کتانژانت با تانژانت معکوس می‌باشد، پس داریم:

$\cot \alpha = -\frac{3}{4}$

۲

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\frac{9}{9} + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\cos^2 \alpha = \frac{9}{25}$

$\cos \alpha = \sqrt{\frac{9}{25}} = +\frac{3}{5}$

۳

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{5}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{-4}{5}$

24ghadam.com

۳- اگر $\sin 135^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 135° را به دست آورید.

۱

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \frac{2}{4}} = -\sqrt{\frac{2}{2} - \frac{1}{2}}$

$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{2}} = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

۲

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \rightarrow \tan \alpha = -1$

۳

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{-1} \rightarrow \cot \alpha = -1$

24ghadam.com

۴- اگر $\tan 24^\circ = \sqrt{3}$ ، آنگاه نسبت‌های دیگر مثلثاتی زاویه 24° را به دست آورید.

زاویه 24° در ربع سوم قرار دارد و در این ربع سینوس و کسینوس منفی و کتانژانت مثبت است.

۱ رابطه کتانژانت با تانژانت معکوس می‌باشد، پس داریم:

$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

۲

$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + (\sqrt{3})^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$1 + 3 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

$\cos^2 \alpha = \frac{1}{4}$

$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$ ربع سوم $\rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{2}$

۳

$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$

$\Rightarrow \sin \alpha = \tan \alpha \times \cos \alpha$

$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{3} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

24ghadam.com

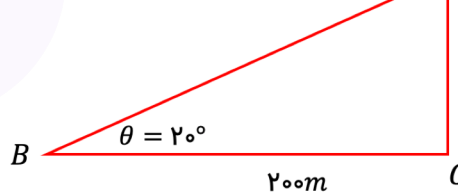
۵- شخصی می‌خواهد عرض یک رودخانه را اندازه‌گیری کند. او ابتدا مطابق شکل، نقطه‌ای چون C و سپس نقطه‌ای مانند A را در امتداد C و در طرف دیگر رودخانه مشخص می‌کند و به اندازه 200 متر از C به صورت افقی در امتداد رودخانه حرکت می‌کند تا به نقطه B برسد. اگر زاویه دید این شخص (از نقطه B به نقطه A)، 2° باشد و $\sin 2^\circ \approx 0.034$ ، او چگونه می‌تواند عرض رودخانه را محاسبه کند؟ پاسخ خود را تا دو رقم اعشار بر حسب متر بنویسید.

24ghadam.com

$1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow 1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\left(\frac{34}{1000}\right)^2} \Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{10000}{1156} - 1$

$\Rightarrow \cot^2 \theta = \frac{10000}{1156} - \frac{1156}{1156} = \frac{8844}{1156} \approx 7.65 \Rightarrow \cot \theta = 2.76$

$\Rightarrow \cot \theta = \frac{BC}{AC} \Rightarrow 2.76 = \frac{200}{AC} \Rightarrow AC = \frac{200}{2.76} = 72.46 \text{ m}$



۶- با فرض بامعنی بودن هر کسر، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف

$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta = \frac{1}{\cos \theta}$

$\frac{1}{\sin \theta} \times \tan \theta \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \times \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta}$

24ghadam.com

ب

$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

$\frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \Rightarrow \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} \times \frac{1 - \sin \theta}{1 - \sin \theta} \Rightarrow \frac{(\cos \theta)(1 - \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{(\cancel{\cos \theta})(1 - \sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta}$

24ghadam.com

پ

$\frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} = \tan \theta$

$\frac{1 + \tan \theta}{1 + \cot \theta} = \frac{1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta}{\sin \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\frac{\cos \theta + \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}} = \frac{\sin \theta (\cancel{\cos \theta} + \sin \theta)}{\cos \theta (\sin \theta + \cancel{\cos \theta})} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$

24ghadam.com

ت

$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$

$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(\cancel{1 + \sin x})}{(\cancel{1 + \sin x})} = 1 - (1 - \sin x)$

$= 1 - 1 + \sin x = \sin x$

24ghadam.com

ث

$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

$\frac{1}{\cos x} - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)}{\cos x} = \frac{(1 - \sin x)}{\cos x} \times \frac{(1 + \sin x)}{(1 + \sin x)} = \frac{(1 - \sin^2 x)}{\cos x (1 + \sin x)}$

$\Rightarrow \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

24ghadam.com