

تمرین

۱ در هریک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

ث) $x(x^2 + 4) < 0$

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3$

ج) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3$

چ) $|7 - 2x| < 1$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0$

ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0$

۲ به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

۳ به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

۴ یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه

فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

۵ تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ محاسبه می‌شود. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰

بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

۱- در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

الف) $1 < 2x - 3 \leq 3 \rightarrow 4 < 2x \leq 6 \rightarrow 2 < x \leq 3 \rightarrow x \in (2, 3]$

ب) $x + 1 \leq 5 - x < 2x + 3 \rightarrow \begin{cases} x + 1 \leq 5 - x \rightarrow 2x \leq 4 \rightarrow x \leq 2 \\ 5 - x < 2x + 3 \rightarrow -3x < -2 \rightarrow x > \frac{2}{3} \end{cases} \rightarrow \frac{2}{3} < x \leq 2 \rightarrow x \in (\frac{2}{3}, 2]$

پ) $-2 < \frac{5-x}{2} < 0 \rightarrow -4 < 5-x < 0 \rightarrow -9 < -x < -5 \rightarrow 5 < x < 9 \rightarrow x \in (5, 9)$

ت) $\frac{4-2x}{3x+1} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 4-2x = 0 \rightarrow x = 2 \\ 3x+1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{3} \end{cases}$

x	$-\frac{1}{3}$	2
$4-2x$	+	-
$3x+1$	-	+
$\frac{4-2x}{3x+1}$	-	+

$x \in (-\frac{1}{3}, 2]$

ث) $x(x^2 + 4) < 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow \text{این معادله جواب ندارد} \end{cases}$

x	0
x	-
$x^2 + 4$	+
$x(x^2 + 4)$	-

$x \in (-\infty, 0)$

ج) $\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \rightarrow \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \leq 0 \rightarrow \frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2} \rightarrow \frac{x(x^2 - 1)}{x^2 - 2x + 2} \leq 0$

ریشه‌ها $\begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \\ x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$ ریشه حقیقی ندارد.

x	-1	0	1
x	-	-	+
$x^2 - 1$	+	-	+
$x^2 - 2x + 2$	+	+	+
$\frac{x^3 - x}{x^2 - 2x + 2}$	-	+	-

$(-\infty, -1] \cup [0, 1] \rightarrow (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

۱- در هر یک از نامعادله‌های زیر، مجموعه جواب را به شکل بازه بنویسید.

چ) $|7 - 2x| < 1 \rightarrow -1 < 7 - 2x < 1 \rightarrow -8 < -2x < -6 \rightarrow 3 < x < 4 \rightarrow x \in (3, 4)$

ح) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3 \rightarrow \frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \rightarrow \frac{x-1}{2} - 1 \leq -3$

$\frac{x-1}{2} - 1 \geq 3 \rightarrow \frac{x-1}{2} \geq 4 \rightarrow x - 1 \geq 8 \rightarrow x \geq 9$

$\frac{x-1}{2} - 1 \leq -3 \rightarrow \frac{x-1}{2} \leq -2 \rightarrow x - 1 \leq -4 \rightarrow x \leq -3$

$\rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [9, +\infty)$

۲- به ازای چه مقادیری از k ، عبارت $A = x^2 + 3x + k$ همواره مثبت است؟

برای اینکه نمودار سهمی همواره مثبت باشد مقدار دلتا (Δ) باید منفی باشد.

پس مقدار دلتا را کوچکتر از صفر قرار می‌دهیم.

$\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (3)^2 - 4(1)(k) \rightarrow 9 - 4k < 0 \rightarrow -4k < -9 \rightarrow k > \frac{9}{4}$

۳- به ازای چه مقادیری از m ، سهمی $y = mx^2 - mx - 1$ همواره پایین محور x هاست؟

برای اینکه نمودار سهمی همواره منفی باشد مقدار دلتا (Δ) و همچنین ضریب x^2 باید منفی باشد.

شرط اول: $\Delta = b^2 - 4ac \rightarrow (-m)^2 - 4(m)(-1) \rightarrow m^2 + 4m < 0 \rightarrow m(m + 4) < 0 \rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$

شرط دوم: ضریب x^2 باید منفی باشد $\rightarrow m < 0$

m	-4	0
m	-	+
$m + 4$	-	+
	+	-

$m \in (-4, 0)$

به ازای مقادیر بین -4 و 0 مقدار دلتا همواره منفی خواهد بود.

۴- یک جسم از بالای یک ساختمان که ۱۳ متر ارتفاع دارد، به هوا پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع این جسم از سطح زمین در ثانیه t از رابطه $h = -5t^2 + 18t + 13$ محاسبه شود، در چه فاصله زمانی، ارتفاع توپ از سطح زمین بیشتر از ۱۳ متر خواهد بود؟

در اینجا معادله مکانی توپ را داریم، برای مکان‌های بیشتر از ۱۳ متر کافی است که معادله مکانی توپ را در h های بیشتر از ۱۳ متر محاسبه کنیم.

$-5t^2 + 18t + 13 > 13 \rightarrow -5t^2 + 18t > 0 \rightarrow t(-5t + 18) > 0 \rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{18}{5} \end{cases}$

t	0	$\frac{18}{5}$
h	-	+

$t \in (0, \frac{18}{5})$

به ازای مقادیر بین 0 و $\frac{18}{5}$ مقدار h بیشتر از ۱۳ خواهد بود.

۵- تعداد ضربان قلب، پس از x دقیقه کار سنگین بدنی، طبق رابطه $y = \frac{15}{8}x^2 - 30x + 200$ محاسبه می‌شود. در چه زمان‌هایی پس از یک کار سنگین بدنی، تعداد ضربان قلب از ۱۱۰ بیشتر است؟ آیا تمام جواب‌های به دست آمده قابل قبول اند؟

در اینجا معادله تعداد ضربان قلب را داریم، برای ضربان بیشتر از ۱۱۰ کافی است که معادله تعداد ضربان قلب را در x های بیشتر از ۱۱۰ متر محاسبه کنیم.

$\frac{15}{8}x^2 - 30x + 200 > 110 \rightarrow \frac{15}{8}x^2 - 30x + 90 > 0 \rightarrow \frac{1}{8}x^2 - 2x + 6 > 0 \rightarrow x^2 - 16x + 48 > 0$

$(x - 4)(x - 12) > 0 \rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 12 \end{cases}$

x	0	4	12
$x^2 - 16x + 48$	-	+	-

طبق جدول تعیین علامت در بازه زمانی کمتر از ۴ دقیقه و بیشتر از ۱۲ دقیقه تعداد ضربان قلب بیشتر از ۱۱۰ است.

$x \in (0, 4) \cup (12, +\infty)$

زمان‌های کمتر از صفر قابل قبول نیستند، زیرا زمان کمیتی همواره نامنفی است.